

CAPITOLUL 1

PROBLEME ALE DINAMICII CORPURILOR DIN SISTEMUL SOLAR

A considera astăzi că mecanica cerească a apărut odată cu legea atracției gravitaționale universale și legile lui Kepler nu mai este o noutate. Net superioare, modelele matematice prin care se studiază mișcarea corpurilor din Sistemul Solar au la bază expresiile acestor legi fundamentale ale astronomiei. Am considerat necesară introducerea acestui capitol teoretic din două motive. În primul rând, acesta reprezintă o trecere în revistă a principalelor probleme ale dinamicii la scară planetară, formulate la nivelul la care ele au fost enunțate la timpul respectiv. În subsidiar, majoritatea ecuațiilor de mișcare constituie un punct de plecare pentru rezolvarea problemelor directe și inverse ale mecanicii cerești (în limita unei bune toleranțe observaționale). Înțelegerea și algoritmizarea acestor probleme m-a preocupat încă din anii facultății (Văduvescu, 1991).

1.1. TRATAREA CLASICĂ A DINAMICII CORPURILOR DIN SISTEMUL SOLAR

1.1.1. Problema celor două corpuri

Conform teoremei lui Newton privind atracția unei sfere materiale goale (Pál și Ureche, 1983), putem asimila orice corp sferic cu repartiție „sferică” a densității prin centrul lui de masă. De aceea, convenim să asociem planetei P de masă m perechea (P, m) și Soarelui S de masă M perechea (S, M) . Problema mișcării punctului material (P, m) în câmpul gravitațional creat de corpul (S, M) este cunoscută sub numele de *problema celor două corpuri*.

1.1.1.1. Mișcarea relativă

După cum se știe, legile de mișcare ale corpului (P, m) pot fi deduse prin exprimarea legii atracției gravitaționale universale în două sisteme de referință: unul inerțial oarecare și celălalt relativ la corpul (S, M) . Dacă \vec{R} și \vec{R}_0 sunt vectorii de poziție ai lui P și S în sistemul

inertial, iar $\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_0$ vectorul de poziție al lui P în sistemul relativ, atunci ecuația mișcării lui P relativ la S este:

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{0}, \quad (1)$$

unde constanta μ este numită parametrul gravitațional, și are expresia:

$$\mu = G(M + m)$$

cu G constanta atracției gravitaționale.

Introducând funcția de forță

$$U = \frac{\mu}{r}, \quad (2)$$

ecuațiile mișcării relative (1) pot fi puse sub forma scalară :

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (3)$$

cu (x, y, z) coordonatele lui P în sistemul relativ la S și

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1.1.1.2. Integralele prime

Adunând ecuațiile mișcării absolute și integrând ecuația obținută, putem enunța teorema centrului de masă:

$$M\vec{R}_0 + m\vec{R} = \vec{a}t + \vec{b}, \quad (4)$$

care exprimă faptul că centrul de masă al celor două corpuri are o mișcare rectilinie și uniformă sau este fix.

Înmulțind vectorial (1) cu \vec{r} și integrând ecuația găsită, obținem integrala ariilor:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}, \quad (5)$$

care exprimă faptul că ariile „măsurate” de raza-vectoare a corpului (P, m) în intervale de timp egale sunt egale, adică legea a doua a lui Kepler. Constanta c se numește constantă ariilor.

Înmulțind scalar ecuația (5) cu \vec{r} , obținem ecuația vectorială a planului mișcării :

$$\vec{c} \cdot \vec{r} = 0 \quad (6)$$

care exprimă faptul că vectorul ariilor \vec{c} este perpendicular pe planul mișcării.

Integrala energiei se obține înmulțind (1) cu $2\vec{r}$ și integrând ecuația rezultată:

$$\dot{\vec{r}}^2 = \frac{2\mu}{r} + h \quad (7)$$

și exprimă conservarea energiei corpului (P, m) în timpul mișcării. Constanta h este constantă energiei.

1.1.1.3. Elementele orbitale

Ecuția (6) exprimă faptul că mișcarea corpului (P, m) în jurul lui (S, M) are loc într-un plan a cărui poziție față de sistemul relativ se determină cu ajutorul constantei $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$. Elementele geometrice care definesc poziția și orientarea acestui plan (figura 1) sunt: Ω - longitudinea nodului ascendent (măsurat în planul Sxy de la axa Sx la direcția nodului ascendent N), ω - argumentul (longitudinea) periastrului Π (măsurat în planul orbitei), i - înclinarea orbitei pe planul Sxy . Mărimile u se numește argument de latitudine, iar v - anomalia adevărată. Uneori se mai folosește ca element orbital, în locul lui ω , longitudinea periheliului, $\varpi = \Omega + \omega$ (deși această variabilă nu are o corespondență geometrică). Elementele care definesc mărimea și forma orbitei sunt a - semiaxa mare și e - excentricitatea. Al șaselea element al orbitei este epoca trecerii la periheliu τ , în locul căreia se mai folosește anomalia medie M la un moment oarecare t .

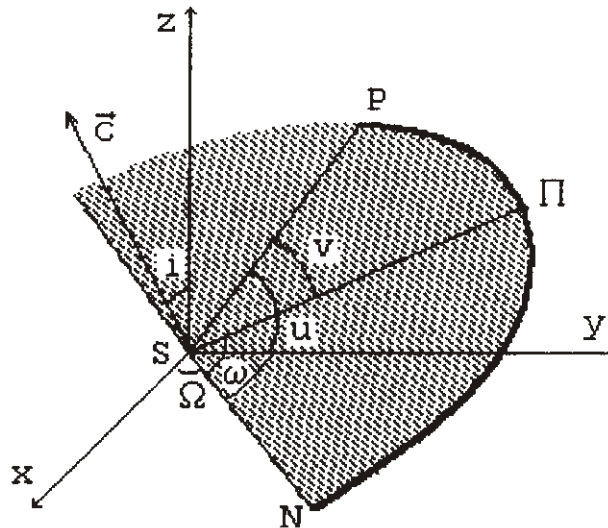


Figura 1- Poziția orbitei față de planul fundamental Sxy și elementele ei geometrice

Aceste elemente definesc în mod geometric orbita, și ele coincid cu cele șase constante care apar în soluția generală a ecuațiilor diferențiale ale problemei celor două corpuri scrisă cu variabile carteziane sau canonice (e.g. Drâmbă, 1958; Pál și Ureche, 1983).

1.1.1.4. Soluția generală a problemei

După cum se cunoaște, exprimarea componentelor razei vectoriale r în sistemul cartezian se realizează prin două rotații succesive ale lui $Sxyz$ în sistemul rectangular $S\xi\eta\zeta$ (al cărui plan $S\xi\eta$ coincide cu planul mișcării, iar axa $S\xi$ trece prin periastrul Π). Ecuațiile matriciale ale transformării furnizează expresiile coordonatelor rectangulare (x, y, z) ale lui P în

funcție de coordonatele polare (r, u) , adică soluția generală în formă parametrică a problemei celor două corpuri:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cos u \\ r \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Integrând sistemul format din integrala ariilor și cea a energiei în coordonate polare, obținem ecuația traiectoriei mișcării în coordonate polare:

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{hc^2}{\mu^2}} \cos(u - \omega)}, \quad (9)$$

care reprezintă ecuația conicei

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

cu parametrii

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + h \frac{c^2}{\mu^2}}, \quad v = u - \omega \quad (10)$$

Ecuația elipsei, cu $e < 1$ ($h < 0$), $p = a(1 - e^2)$ furnizează anomalia excentrică E , definită de relația:

$$a - r = ae \cos E \quad (11)$$

iar legătura între E și anomalia medie M la momentul t este:

$$M = n(t - \tau), \quad (12)$$

unde n este mișcarea medie, dată de ecuația lui Kepler:

$$E - e \sin E = M \quad (13)$$

Ecuațiile (8)-(13) rezolvă în mod complet problema celor două corpuri. Predicția pozițiilor pe care corpul (P, m) le va ocupa în mișcarea sa în câmpul gravitațional al lui (S, M) este cunoscută sub numele de calcul de efemeridă. În mecanica cerească, acesta este unul dintre foarte puținele cazuri în care ecuațiile de mișcare pot fi integrate în mod analitic, complet (în termeni finiți).

1.1.2. Problema celor n corpuri

Dacă vom calcula pozițiile corpurilor din Sistemul Solar folosind problema celor două corpuri, vom remarca abateri „O-C” (observat minus calculat) de circa 1' în coordonate. Reciproc, calculând elementele orbitale din observații efectuate la diferite epoci (par. 1.3), vom

constata diferențe de ordinul a 1° (în special în Ω și ω). După cum se cunoaște, aceste diferențe apar datorită perturbațiilor produse de alte corpuri asupra lui (P, m) . Rezultă că elementele orbitale din problema celor două corpuri nu mai pot fi considerate ca și constante, ele variind în timp. Problema celor n corpuri constă în studiul mișcării a n corpuri ($n \geq 3$), sub acțiunea atracției gravitaționale mutuale dintre acestea, conform legii atracției universale.

1.1.2.1. Problema celor trei corpuri

Studiul mișcării asteroizilor în jurul Soarelui considerând și perturbațiile gravitaționale datorate lui Jupiter, sau studiul mișcării Lunii în jurul Pământului considerând Soarele corp perturbator, reprezintă exemple de problemă a celor trei corpuri. Ecuațiile de mișcare, scrise într-un sistem cartezian oarecare, sunt în număr de nouă (e.g. Drâmbă, 1958; Pál și Ureche, 1983):

$$\begin{cases} \ddot{x}_i = Gm_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} + Gm_k \frac{x_k - x_i}{r_{ik}^3} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x_i}; \\ \ddot{y}_i = Gm_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3} + Gm_k \frac{y_k - y_i}{r_{ik}^3} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial y_i}; \\ \ddot{z}_i = Gm_j \frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3} + Gm_k \frac{z_k - z_i}{r_{ik}^3} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial z_i}; \end{cases} \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j \neq k \quad (14)$$

unde U este funcția de forță și are expresia:

$$U = G \cdot \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} \right) \quad (15)$$

unde r_{ij} este distanța dintre corpurile i și j , m_i masa corpului i iar G constanta gravitațională

Și pentru acest sistem de ecuații diferențiale se pot găsi integrale prime. Integralele centrului de masă sunt:

$$\xi = \dot{\xi}_0 t + \xi_0, \quad \eta = \dot{\eta}_0 t + \eta_0, \quad \zeta = \dot{\zeta}_0 t + \zeta_0, \quad (16)$$

unde (ξ, η, ζ) reprezintă poziția centrului de masă în sistemul rectangular. Teorema de mișcare a centrului de masă cu viteză constantă (sau a imobilității sale) rămâne valabilă și în problema celor trei corpuri.

Integralele prime ale ariilor sunt date de ecuațiile:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = a \\ \sum_{i=1}^3 m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = b, \\ \sum_{i=1}^3 m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = c \end{cases} \quad (17)$$

unde constantele (a, b, c) reprezintă componentele vectorului moment cinetic în sistemul xyz .

Integrala energiei este dată de ecuația:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = U + h \quad (18)$$

Integrarea ecuațiilor de mișcare (14) presupune introducerea a 18 constante de integrare, în timp ce integralele prime (16) introduc șase constante de integrare, (17) - trei, iar (18) - o constantă de integrare. Datorită acestui fapt, integrarea ecuațiilor de mișcare în problema celor trei corpuri se poate reduce la un sistem de ecuații diferențiale care conține $18 - 10 = 8$ constante. Bruns (1887) și Poincaré (1890) au demonstrat o celebră teoremă referitoare la problema celor trei corpuri, iar Painlevé (1897) a extins rezultatul pentru problema celor n corpuri, potrivit căruia cele 10 integrale prime (numite clasice) sunt singurele integrale algebrice independente în problema respectivă, orice altă integrală fiind o combinație a celor clasice (Whittaker, 1927).

1.1.2.2. Problema restrânsă a celor trei corpuri

Am văzut că integrarea analitică a ecuațiilor (14) este imposibil de efectuat în condiții inițiale generale. Din această cauză, s-a încercat rezolvarea problemei în câteva condiții particulare.

Două dintre soluții se datorează lui Lagrange și Euler, care au studiat problema considerând că cele trei corpuri alcătuiesc vârfurile unui triunghi echilateral (aflat într-un plan fix și având latura variabilă) și respectiv că ele sunt coliniare. Analiza acestor probleme conduce la rezolvarea a trei grupe de ecuații diferențiale, fiecare dintre acestea reducându-se la ecuațiile unei probleme de mișcare a două corpuri, cu funcții de masă bine determinate.

Un alt caz particular, cunoscut sub numele de problema restrânsă, presupune mișcarea circulară a maselor m_1 și m_2 într-un plan fix, în jurul centrului comun de masă, și un al treilea corp de masă m_3 „neglijabilă” care se mișcă în spațiu sub acțiunea gravitațională a primelor două. Un caz particular al problemei restrânse este problema restrânsă plană, unde și corpul m_3 se mișcă tot în planul primelor două. Două exemple de aplicații ale acestor probleme sunt studiul mișcării asteroizilor troieni („blocați” în triunghiul echilateral Soare-Jupiter-asteroid) și studiul pierderii de masă în sistemele binare strânse (Văduvescu, 1990).

Alegând convenabil unitățile de masă, distanță și timp (e.g. Drămbă, 1958), sistemul ecuațiilor diferențiale de mișcare a lui m_3 , scris în coordonate generalizate (q_1, q_2) și impulsuri generalizate (p_1, p_2) , poate fi adus la forma canonică:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, & \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} \end{cases}, \quad (19)$$

unde $H = T - U$ este hamiltonianul mișcării, iar T energia cinetică a sistemului.

Rezolvarea acestui sistem, în cazul particular când membrii din dreapta ai ecuațiilor sunt nuli, conduce la existența a cinci puncte fixe în raport cu m_1 și m_2 , notate L_1, \dots, L_5 și numite puncte de echilibru (sau de librație) în problema celor trei corpuri.

1.1.2.3. Ecuațiile Euler-Lagrange

Introducând funcția perturbatoare R prin relația

$$U = \frac{\mu}{r} + R, \quad (20)$$

unde primul termen reprezintă potențialul gravitațional din problema celor două corpuri (cu μ parametrul gravitațional), ecuațiile Euler-Lagrange (e.g. Kovalevsky, 1967) furnizează variațiile elementelor orbitale cu timpul în problema celor trei corpuri:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M} \\ \frac{di}{dt} = \frac{-1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \end{array} \right. \quad (21)$$

Cunoașterea funcției perturbatoare R , ca funcție de elementele orbitale, conduce la calculul elementelor orbitale la un moment oarecare t . Aceste elemente definesc orbita osculatoare la momentul t , adică orbita kepleriană (neperturbată) pe care corpul ar avea-o dacă ar dispărea perturbația R .

În acest cadru, presupunem cunoscute metodele de rezolvare analitică sau numerică a sistemului diferențial (21) pentru obținerea elementelor orbitale osculatoare $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$.

1.1.2.4. Ecuațiile de mișcare în problema celor n corpuri

În sistemul rectangular inerțial oarecare $OXYZ$, cu ajutorul funcției de forță

$$U = G \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (22)$$

ecuațiile mișcării absolute se scriu în funcție de constanta gravitațională G (e.g. Pál și Ureche, 1983):

$$m_i \ddot{X}_i = \frac{\partial U}{\partial X_i}, \quad m_i \ddot{Y}_i = \frac{\partial U}{\partial Y_i}, \quad m_i \ddot{Z}_i = \frac{\partial U}{\partial Z_i}, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (23)$$

Acestea reprezintă un sistem de $3n$ ecuații diferențiale care introduc, alături de cele $3n$ necunoscute (X_i, Y_i, Z_i) , încă $2n$ constante de integrare. Problema poate fi rezolvată ca o problemă Cauchy cu condiții inițiale cunoscute din observații (poziții, viteze și accelerații - par. 1.2).

Notând $\vec{R}_i = \vec{R}_0 + \vec{r}_i$ și considerând funcțiile perturbatoare:

$$R_i = G \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (24)$$

obținem ecuațiile mișcării relative raportată la corpul central m_0 :

$$\begin{cases} \ddot{x}_i + G(m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial x_i} \\ \ddot{y}_i + G(m_0 + m_i) \frac{y_i}{r_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial y_i} \\ \ddot{z}_i + G(m_0 + m_i) \frac{z_i}{r_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial z_i} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (25)$$

1.1.2.5. Integralele prime ale ecuațiilor în problema celor n corpuri

Ca și în cazurile anterioare, rezultă integralele mișcării centrului de masă al sistemului :

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \vec{R}_i = \vec{a}t + \vec{b} \quad (26)$$

și integrala ariilor (de conservare a momentului cinetic) :

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i (\vec{R}_i \times \dot{\vec{R}}_i) = \vec{c} \quad (27)$$

Planul perpendicular pe vectorul ariilor \vec{c} cu originea în centrul de masă al sistemului se numește planul lui Laplace, și este considerat ca plan fundamental de referință în cazul studiului dinamicii Sistemului Solar pe perioade mari de timp (par. 1.1.3).

Dacă E reprezintă energia cinetică a sistemului :

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} m_i (\dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 + \dot{Z}_i^2) \quad (28)$$

iar $-U \equiv V$ este energia potențială, atunci integrala primă a energiei

$$E + (-U) = h \quad (29)$$

(cu h constanta energiei) exprimă legea de conservare a energiei mecanice a sistemului.

1.1.3. Stabilitatea Sistemului Solar

1.1.3.1. Introducere

În mecanica cerească, una dintre primele abordări moderne ale teoriei stabilității este considerată lucrarea profesorului japonez Hagihara (1957). În capitolul introductiv al lucrării, autorul oferă o imagine asupra noțiunilor legate de stabilitate: “Va fi păstrată configurația actuală a Sistemului Solar pentru un interval lung de timp? Vor cădea planetele pe Soare sau unele dintre ele se vor îndepărta în mod treptat de Soare astfel încât nu peste multă vreme nu vor mai aparține Sistemului Solar? Se va apropia vreo planetă de o alta și vor forma un sistem binar ce se va roti în jurul Soarelui precum sistemul Pământ-Lună sau va deveni acesta mai excentric sau mult mai înclinat pe ecliptică, rupând configurația actuală a Sistemului Solar? Cum au fost formate sistemele de sateliți în trecut? Acestea sunt întrebări ce pot fi puse de oricine începe să se gândească la minunile fenomenelor cerești ... Toate aceste chestiuni sunt numite în mod vag stabilitate în mecanica cerească.”

În capitolul patru al unei foarte recente lucrări despre haos și stabilitate (Diacu și Holmes, 1996), autorii definesc noțiunea de stabilitate a Sistemului Solar astfel: „dacă nu se produc ciocniri între corpurile care-l alcătuiesc și dacă nici o planetă nu va evada vreodată din el; folosind terminologia problemei celor n corpuri, aceasta înseamnă că nu apar singularități de nici un tip și nici o particulă nu părăsește sistemul, nici chiar într-un viitor sau trecut infinit de îndepărtate”.

A cerceta dacă Sistemul Solar este instabil înseamnă a evalua ecuațiile (21) în care expresia lui R conține termeni datorati perturbațiilor planetare. A afirma astăzi că acest sistem este instabil - după mai mult de un secol când Spiru Haret infirma rezultatele lui Laplace, Lagrange și Poisson, și la numai trei ani de la prima coliziune observată a două corpuri cerești - nu mai este o noutate.

1.1.3.2. Concepte de stabilitate

Diverși autori au abordat aspecte diferite ale stabilității în matematică și mecanica cerească. Vom enunța în cele ce urmează principalele concepte ale noțiunii de stabilitate. Conform (Szebehely, 1984), la ora actuală există cel puțin 50 de terminologii și concepte de stabilitate.

Stabilitatea în sensul Hill

În 1878, Hill propunea folosirea integralei energiei din problema restrânsă a celor trei corpuri, pentru a stabili limitele de mișcare pentru sistemele dinamice conservative cu potențiale independente de timp. Ideea de bază era folosirea ecuației:

$$v^2 = 2F(q_1, q_2, \dots, q_n) - C, \quad (30)$$

unde v este viteza, F funcția potențial, q_i sunt coordonatele, iar C este o constantă a mișcării.

Ideea originală a lui Hill era de a stabili limitele orbitei lunare, folosind potențialul Hill simplificat și integrala Jacobi asociată. Considerabilul avantaj al acestei metode este faptul că nu este necesară cunoașterea soluțiilor pentru a evalua stabilitatea mișcării. Folosind aproximațiile problemei restrânse plană circulară a celor trei corpuri (Soare-Pământ-Lună) în problema lunară, metoda lui Hill arată că orbita Lunii este mărginită.

Stabilitatea în sensul Szebehely

O măsură cantitativă de stabilitate este următoarea: dacă constanta de integrare a orbitei de investigat este C_{ac} (la momentul actual), iar valoarea ei critică (la care apare instabilitatea) este C_{cr} , atunci măsura stabilității este definită de raportul (Szebehely, 1984):

$$S = \frac{C_{ac} - C_{cr}}{C_{cr}} \quad (31)$$

Semnificația fizică a acestei mărimi este că ea arată distanța în spațiul fazelor dintre orbitele actuală și critică. Dacă $S < 0$ avem instabilitate de tipul Hill, ceea ce sugerează că Luna poate părăsi Pământul, devenind o planetă a Soarelui. Ca o aplicație a acestui tip de stabilitate, prezentăm în tabelele 1 și 2 valorile indicelui de stabilitate S (Szebehely, 1979) în cazul sistemelor de sateliți ai planetelor, respectiv în cazul problemei celor trei corpuri Soare-Jupiter-planete.

Planeta	Satelitul	Stabilitatea	Planeta	Satelitul	Stabilitatea
Pământul	Luna	0,00015	Saturn	Mimas	0,72023
Marte	Phobos	0,00254		Enceladus	0,56154
	Deimos	0,00098		Thetis	0,45187
Jupiter	V	1,33570		Dione	0,35133
	Io	0,56521		Rhea	0,25030
	Europa	0,35058		Titania	0,10458
	Ganimedede	0,21478		Hyperion	0,08531
	Calisto	0,11663		Iapetus	0,03221
	XIII	0,0106		Phoebe	0,00313
	VI	0,00988		Uranus	Miranda
	VII	0,00944	Ariel		0,21569
	X	0,00925	Umbriel		0,15462
	XII R	-0,00536	Titania		0,09358
XI R	-0,00612	Oberon	0,06939		
VIII R	-0,00656	Neptun	Triton	0,21629	
IX R	-0,00666		Nereida	0,01206	

Tabelul 1- Stabilitatea sistemelor de sateliți din Sistemul Solar

Planeta	Mercur	Venus	Pământ	Marte	Saturn	Uranus	Neptun	Pluto
Stabilitatea	3,60	1,61	1,00	0,48	0,07	0,35	0,64	0,85

Tabelul 2 - Stabilitatea sistemului Soare-Jupiter-planetă

Stabilitatea în sensul Liapunov

În anul 1892, Liapunov stabilea noțiunea de corespondență izocronă între mișcarea neperturbată și cea perturbată. Referindu-ne la figura 2, fie orbita originală A , iar cea perturbată B . Corespondența izocronă este reprezentată de deviația y .

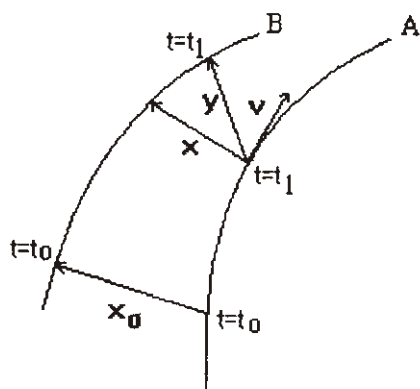


Figura 2 - Corespondențele normală și izocronă

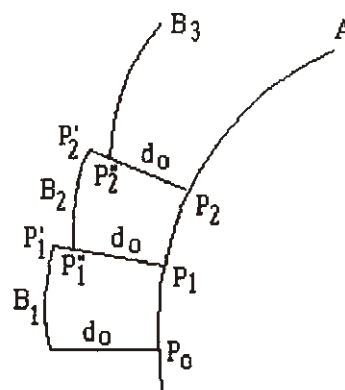


Figura 3 - Calculul exponenților caracteristici Liapunov

Fie sistemul de ecuații diferențiale $dx/dt = F(x,t)$ pentru vectorul x ce are o soluție $x = \psi(t)$ simbolizată prin curba A , în figura 2. Soluția este stabilă dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ a.i. } \forall t: |y_0| = |\phi(t_0) - \psi(t_0)| < \delta \Rightarrow |\phi(t) - \psi(t)| < \varepsilon \quad (32)$$

unde $\phi(t)$ este soluția obținută după aplicarea perturbațiilor, figurată prin curba B .

Numerele caracteristice Liapunov indică stabilitatea soluțiilor cu ajutorul aplicării perturbațiilor repetate și al integrărilor numerice. Figura 3 arată acest procedeu. Curba A este curba neperturbată iar segmentele B_1, B_2, \dots reprezintă soluțiile perturbate. Schimbarea uneia din condițiile inițiale la $t=t_0$ este d_0 astfel încât integrarea orbitei perturbate începe la P_0' . Când punctul P_1' este atins, perturbația $d_0 = P_1 P_1''$ este din nou introdusă, obținând segmentul B_2 . În mod succesiv, dacă $d_i = P_i P_i'$ și $d_0 = P_0 P_0' = P_1 P_1' = \dots = P_i P_i'$, atunci avem:

$$\frac{d_i}{d_0} = \frac{P_i P_i'}{P_0 P_0'}$$

și numărul caracteristic Liapunov este definit de relația:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{nt} \sum_{i=1}^n \ln \frac{d_i}{d_0} \right) \quad (33)$$

Dacă $L > 0$ avem instabilitate sau mișcare haotică, dacă $L = 0$ avem mișcare cvasi-periodică, dacă $L < 0$ avem stabilitate asimptotică sau atracție. Astfel, numărul caracteristic Liapunov va descrie cu siguranță detaliile aspectelor de stabilitate ale unei soluții date pentru perturbații diferite, în timp ce metoda lui Hill va oferi doar margini posibile, fără a considera orbite specifice. Dragoș (1976) enunță trei teoreme de stabilitate ale lui Liapunov.

Prima teoremă de stabilitate Liapunov:

Dacă pentru sistemul de ecuații de mișcare perturbată

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (34)$$

se poate găsi o funcție $V(x)$ de semn definit, a cărei derivată \dot{V} să fie, în virtutea sistemului, o funcție de semn constant opus semnelui lui V sau identic nulă, atunci mișcarea neperturbată (soluția banală) este stabilă.

Teorema a doua a lui Liapunov (de stabilitate asimptotică)

Dacă pentru sistemul mișcării perturbate (34) se poate găsi o funcție de semn definit V , având derivata în virtutea sistemului de semn definit contrar lui V (nu doar de semn constant), atunci stabilitatea este asimptotică.

Teorema lui Cetaev (Liapunov) de nestabilitate

Dacă pentru ecuațiile diferențiale ale mișcării perturbate (34) se poate găsi o funcție $V(x)$ astfel încât într-o vecinătate oricât de mică a originii să existe un domeniu $V > 0$, derivata \dot{V} (calculată în virtutea sistemului) fiind pozitiv definită în acest domeniu, atunci mișcarea neperturbată este instabilă.

Stabilitatea în sensul Poisson

Să presupunem (e.g. Drâmbă, 1958) cazul mișcării

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (35)$$

în care există un domeniu n -dimensional V al spațiului (x_1, x_2, \dots, x_n) al cărui volum este finit, adică integrala :

$$\int \int \dots \int_V dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (36)$$

de n ori

extinsă la toate punctele din V este finită. Să mai presupunem că oricare ar fi punctul (x_1, x_2, \dots, x_n) din V , traiectoria $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ a sistemului diferențial (35), care trece prin acest punct, este situată în întregime în V atunci când t variază de la $-\infty$ la ∞ . Vom urmări

raționamentul în spațiul tridimensional. Să considerăm, conform cu figura 4, în volumul V o porțiune mai mică V_0 situată în întregime în V .

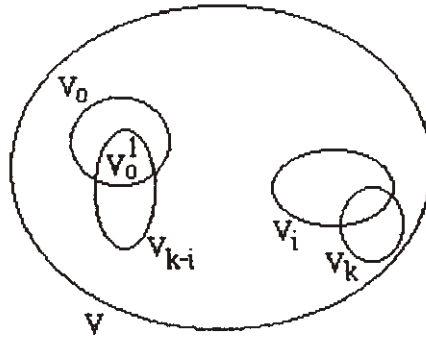


Figura 4 - Stabilitatea în sensul Poisson

Punctele ce alcătuiesc V_0 la momentul $t=0$ vor ocupa după un interval de timp T un alt volum V_1 , și în general, la momentul iT volumul V_i , unde i este un număr natural. Putem scrie șirul:

$$V_0, V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_k, \dots \quad (37)$$

și deoarece sistemul (35) admite invariantul integral de volum (36) (acum $n=3$), rezultă că toți termenii șirului (37) vor fi egali: $V_i = V_k$ pentru orice i și k numere naturale. Cu alte cuvinte, V_0 se deplasează și rămâne în V pentru orice t , păstrându-și măsura volumului dar schimbându-și forma și așezarea când t variază. Conform teoremei lui Arhimede, cum V este finit și $V_0 < V$, rezultă că există numărul natural n astfel încât:

$$(n+1) V_0 > V \quad (38)$$

și, prin urmare, domeniile sau volumele din șirul (31), așezate toate în V , nu pot fi toate exterioare unele altora. De aici rezultă că există două așezări V_i și V_k ($i \neq k$) ale lui V astfel încât $V_i \cap V_k \neq \emptyset$

Rezultă că există un număr natural $\alpha_1 = k - i$ astfel încât

$$V_0 \cap V_{\alpha_1} = V_0^1 \subset V_0$$

Efectuând asupra lui V_0^1 același raționament ca și asupra lui V_0 , rezultă existența unui număr natural α_2 , astfel încât:

$$V_0^1 \cap V_{\alpha_2} = V_0^2 \subset V_0^1 \subset V_0$$

Repetând indefinit șirul de operații, alcătuim următoarea schemă:

$$\begin{array}{l} V_0, V_1, V_2, \dots, V_{\alpha_1} \\ V_0^1, V_1^1, V_2^1, \dots, V_{\alpha_2}^1 \\ V_0^2, V_1^2, V_2^2, \dots, V_{\alpha_3}^2 \\ \dots \\ V_0^p, V_1^p, V_2^p, \dots, V_{\alpha_{p+1}}^p \end{array} \quad (39)$$

unde toți α sunt naturali. Din modul de alcătuire, rezultă:

$$\begin{aligned} V_o^1 &= V_o \cap V_{\alpha 1} \subset V_o \\ V_o^2 &= V_o^1 \cap V_{\alpha 2} \subset V_o^1 \\ &\dots\dots\dots \\ V_o^p &= V_o^{p-1} \cap V_{\alpha p} \subset V_o^{p-1} \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

adică:

$$V_o \supset V_o^1 \supset V_o^2 \supset \dots \supset V_o^p \supset \dots \supset \nu \tag{40}$$

unde ν este limita șirului mărginit:

$$\nu = \lim_{p \rightarrow \infty} V_o^p$$

Mai departe, rezultă că un punct M care se găsește în V_o^p la momentul zero s-a găsit în $V_o^{p-1}, V_o^{p-2}, \dots, V_o^1, V_1$ la momente anterioare, și prin urmare acest punct s-a găsit în V_o de p ori.

Dacă considerăm acum cazul limită, luând un punct din ν , rezultă că acest punct a traversat V_o , în mișcarea lui, de o infinitate de ori în trecut. Prin alegerea domeniului V_o arbitrar de mic, rezultă toți termenii șirului (40) arbitrar de mici (deci și ν). Deci, în condițiile inițiale ale mișcării (35), admitând invariantul integral de volum, un punct material supus ecuațiilor de mișcare trece de o infinitate de ori, oricât de aproape, de orice punct al traiectoriei. Aceasta este stabilitatea Poisson.

Stabilitate ierarhică

Conform Roy (1982) sau Roy et al. (1985), un sistem de n corpuri se numește sistem dinamic ierarhic (HDS) dacă atunci când este descris într-un sistem de coordonate convenabil ales, razele orbitale pot fi ordonate în mărime ascendentă, ordinea fiind menținută pe un interval de timp cel puțin la fel de lung cât cea mai lungă perioadă orbitală a sistemului. Un HDS se numește ierarhic stabil dacă într-un interval de timp substanțial mai lung decât cea mai lungă perioadă a sistemului au loc următoarele condiții:

- ordinea mărimilor razelor vectoriale ale corpurilor nu se modifică;
- nu există apropieri semnificative între oricare două corpuri, astfel încât semiaxele mari să fie modificate în mod ireversibil;
- nici un corp nu este ejectat de sistem.

Dacă notăm cu H energia totală a unui sistem HDS alcătuit din trei corpuri, iar prin c momentul cinetic, atunci cantitatea $S = c^2 H$ este un important parametru pentru stabilitatea unui astfel de sistem. Valoarea critică a lui S , notată S_{crit} , este valoarea lui S pentru care masele sunt aranjate în configurația de echilibru colinar $m_1 m_2 m_3$. Dacă, pentru un HDS dat, $S \leq S_{crit}$,

atunci stabilitatea ierarhică este asigurată. În caz contrar, stabilitatea nu poate fi garantată. Acesta este criteriul lui Zare. Prima lucrare citată oferă și o aplicație la stabilitatea Sistemului Solar. Astfel, Sistemul Solar este în sisteme triple HDS, de exemplu, Soare-Jupiter-Saturn, Pământ-Soare-Lună, sau Soare-Saturn-Uranus ș.a.m.d, criteriul lui Zare fiind satisfăcut. Printre excepții se numără sateliții cu mișcare retrogradă ai lui Jupiter, despre care se crede că au fost asteroizi capturați de planetă.

1.1.3.3. Teorema lui Spiru Haret

După cum se cunoaște, pentru rezolvarea problemei celor n corpuri, metoda variației constantelor (elementelor orbitale, E) folosește dezvoltări ale elementelor orbitale în serii de puteri în jurul elementelor orbitei neperturbate:

$$E = E_0 + (t - t_0)\dot{E}(t_0) + \frac{1}{2!}(t - t_0)^2\ddot{E}(t_0) + \dots, \quad (41)$$

unde E_0 se referă la orbita osculatoare la momentul t_0 , iar E la cea adevărată. Expresiile \dot{E}, \ddot{E}, \dots reprezintă termenii ecuațiilor Euler-Lagrange (21) și derivatele lor în raport cu timpul. În aceste expresii, din exprimarea funcției perturbatoare R ca sumă de funcții (24), apar termeni de ordinul întâi, doi, ... în raport cu excentricitatea, înclinarea orbitei și masele corpurilor perturbatoare.

În 1773, Laplace arăta că expresia semiaxe mari ($E = a$) limitată la prima aproximație a seriei de puteri a excentricității nu conține termeni seculari (liniari cu timpul).

Între 1774 și 1776, Lagrange extindea rezultatul, demonstrând că pentru aproximații de orice ordin în excentricități, de orice ordin în sinusul înclinărilor reciproce și pentru perturbații de ordinul întâi în raport cu masele, în expresia semiaxe mari nu apar termeni seculari.

În 1809, Poisson împingea mai departe studiul stabilității, demonstrând că semiaxe mari nu conțin termeni seculari în perturbațiile de ordinul al doilea în raport cu masele.

Toate aceste rezultate sugerau faptul că Sistemul Solar este stabil, adică expresiile semiaxelor orbitelor includ doar termeni periodici, fără a conține termeni seculari, care ar putea genera instabilitate.

La 30 ianuarie 1878, la terminarea studiilor la Facultatea de Științe din Paris, tânărul matematician român Spiru Haret infirma sugestiile lui Laplace, Lagrange și Poisson, demonstrând că dacă se consideră expresia funcției perturbatoare R aproximată prin serii până la puterea a treia a masele, atunci în expresiile axelor mari ale planetelor apar termeni seculari. Acest rezultat este conținut în teza cu titlul *Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires* (Asupra invariabilității axelor mari ale orbitelor planetare), Haret devenind astfel primul român doctor în matematici la Paris (e.g. Andonie, 1965). Rezolvând cu succes o

dificilă problemă de mecanică cerească (în 36 de etape împărțite în patru capitole) Spiru Haret a contribuit în mod hotărâtor la schimbarea concepției referitoare la stabilitatea Sistemului Solar-planetar.

În referatele prezentate în cadrul stagiului, am întâlnit și unele erori sau deficiențe în teza lui Haret, care din fericire nu influențează concluzia finală. De exemplu, în lucrarea sa în trei volume, Andonie (1965) afirmă (pag.220) faptul că „Haret a dat tezei sale trei redactări succesive. În prima redactare, influențat de unele omisiuni făcute de Poisson, conchisese că și în cazul considerării puterii a treia a masei, axele mari ale orbitelor sunt invariabile. Dar, ca om de știință prob, reia calculele, găsește omisiunile esențiale și ajunge la rezultatul contrar”. Într-o teză mai mult decât exhaustivă, Meffroy (1955) caută o expresie analitică a termenilor seculari puri ai perturbației de ordinul al treilea a axelor mari ale orbitelor osculatoare, dovedind existența acestora în cazul particular când înclinațiile orbitelor sunt nule și excentricitățile foarte mici. După ce trece în revistă rezultatele lui Laplace, Lagrange, Poisson și Tisserand, autorul francez se oprește și asupra rezultatului lui Haret. După ce amintește de termenul secular găsit de acesta la începutul calculului, Meffroy își exprimă regretul asupra neexplicitării coeficienților care apar în termenul său secular și pe de altă parte asupra necercetării ordinului său de mărime. Mai mult, într-o lucrare ulterioară (Meffroy, 1958), autorul împinge calculul funcției perturbatoare până la puterea a șasea a excentricității.

Cu toate aceste erori sau deficiențe inerente pentru o problemă atât de complexă, nu puține au fost ecourile pozitive la adresa rezultatului lui Spiru Haret. În monumentalul *Tratat de mecanică cerească* se pot citi următoarele considerații făcute de Tisserand nu cu mult după susținerea tezei lui Haret (Tisserand, 1889): „Într-o Teză susținută la Sorbona în 1878, Domnul Spiru Haret a urmat calea pe care i-o indicasem; el a reluat, între altele, o veche demonstrație în care Poisson credea că dovedise că axele mari nu au inegalități seculare de ordinul trei în raport cu masele, când se iau în considerație doar variațiile elementelor planetei perturbate. Domnul Haret a demonstrat că axele mari conțin inegalități seculare de ordinul trei în raport cu masele”. O altă referire la teza lui Spiru Haret este făcută la pagina 10 a lucrării lui Hagihara (1957). Recent, un alt ecou asupra tezei marelui om de știință român rezonază și din lucrarea profesorului Á.Pál (1991) care pune rezultatul lui Haret sub formă de teoremă și enunță câteva posibile aplicații, rămase încă nerezolvate.

1.1.3.4. Abordare numerică a problemei stabilității

O metodă modernă de analiză în studiul stabilității Sistemului Solar este integrarea numerică a ecuațiilor de mișcare (par.1.2). În acest sens, Kinoshita și Nakai (1988) integrează numeric orbitele celor cinci planete exterioare pe un interval de cinci milioane de ani. Cele șase

elemente orbitale sunt figurate pentru cele cinci planete pe diagrame reprezentând variația lor în timp. Autorii indică posibilitatea de a discuta evoluția pe termen lung prin folosirea teoriei perturbațiilor seculare. Configurația prezentă a planetelor exterioare poate fi stabilă pe perioade lungi de timp (comparabile cu vârsta Sistemului Solar), deși variația mișcării lui Pluto (în principal excentricitatea și semiaxa) este mare și neregulată, fiind datorată deselor „violări” ale orbitei lui Neptun.

O altă abordare mai recentă (Laskar, 1992) folosește un pas de 500 de ani și un interval de 400 de milioane de ani. Rezultatul este o mișcare haotică, cu un exponent Liapunov de $1/5$ ani. Totuși, chiar pentru această perioadă, autorul nu observă nici un eveniment catastrofic important. Planeta cu cea mai haotică comportare este Mercur.

1.2. METODE DE INTEGRARE NUMERICĂ A ECUAȚILOR DE MIȘCARE

După cum este cunoscut, problema directă a mecanicii cerești, cunoscută sub denumirea clasică de calcul de efemeridă, constă în determinarea evoluției punctului material sub acțiunea gravitațională a corpului central și a celor perturbatoare, în ipoteza cunoașterii unor condiții inițiale (poziții și viteze), rezultate din observații.

Conform Brouwer și Clemence (1961), integrarea numerică este cea mai puternică metodă de determinare a mișcării corpurilor din Sistemul Solar pentru câteva revoluții în jurul corpului central. Totuși, pentru determinarea orbitelor pentru mai multe revoluții, experiența arată că metodele analitice sunt mai eficiente.

1.2.1. Metoda lui Cowell

Metoda lui Cowell a fost pentru prima dată utilizată în anul 1910 (e.g. Brouwer și Clemence, 1961), pentru predicția întoarcerii cometei Halley. În această metodă, ecuațiile de mișcare sunt scrise sub formă rectangulară și integrate în mod direct, furnizând coordonatele rectangulare ale corpului perturbat. La fiecare pas, atracțiile corpurilor perturbatoare (presupuse cunoscute) sunt adăugate la cea a corpului central. Avantajul metodei Cowell este acela că asupra orbitei inițiale nu este făcută o aproximație de orbită conică, metoda putând fi aplicată în sisteme de corpuri nedominate de un corp central. Dezavantajul metodei constă în convergența mai puțin rapidă față de alte metode.

Alegând corpul central drept origine a sistemului de coordonate, ecuațiile diferențiale ale mișcării corpului de masă m , perturbat de corpurile de mase m_1, m_2, \dots se scriu:

$$\ddot{x} = -k^2(1+m)\frac{x}{r^3} + \sum_j k^2 m_j \left(\frac{x_j - x}{\rho_j^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right) \quad (42)$$

și cele analoge în y și z . Prin alegerea unității de timp, ziua efemeridelor, și a unității de masă, masa corpului central, constanta $k^2=G$ reprezintă pătratul constantei lui Gauss $k=0,0172020985$. Notățiile

$$r_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2}$$

$$\rho_j = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2}$$

reprezintă distanța de la corpul perturbator j la corpul central, și respectiv distanța de la corpul perturbator la cel perturbat.

Ecuția (42) reprezintă ecuația fundamentală a metodei lui Cowell. Primul termen reprezintă acțiunea corpului central asupra lui m , primul termen din paranteză fiind acțiunea lui m_j asupra lui m , iar ultimul acțiunea lui m_j asupra corpului central. În cazul în care se dorește integrarea ecuațiilor de mișcare pentru un asteroid sau o cometă, se aproximează $m \approx 0$. În acest caz, x_i, y_i, z_i se presupun cunoscute, ceea ce permite ca soluția (x, y, z) să fie obținută prin aproximații succesive, după cum urmează:

Să presupunem că se dorește integrarea ecuațiilor de mișcare (42) ale unui asteroid în jurul corpului central - Soarele, sub acțiunea perturbatoare a planetelor. În prima etapă sunt calculate coordonatele (x, y, z) ale asteroidului la epoca osculației t_0 , folosind formulele (8) din problema celor două corpuri și elementele orbitale presupuse cunoscute. Aceste coordonate formează primul termen al ecuației (42). Termenul al doilea se obține prin sumarea perturbațiilor planetare, determinate la rândul lor din datele inițiale cunoscute asupra coordonatelor (x_j, y_j, z_j) , a maselor m_j și a distanțelor r_j și ρ_j . Notând prin f_x suma celor doi termeni referitoare la coordonata x , se calculează valorile f, f', \dots, f'', f''' corespunzătoare lui f_x din calculul cu diferențe finite (analog și pentru celelalte coordonate y și z). Următorul pas constă în recalcularea valorilor f_x, f_y și f_z pentru datele $t_0 + w, t_0 + 2w, \dots$ (unde w este pasul de integrare), folosind valorile x, y și z rezultate din tabelele de integrare.

1.2.2. Metoda lui Encke

Spre deosebire de metoda lui Cowell, metoda lui Encke furnizează, în locul coordonatelor (x, y, z) , diferențele între coordonatele reale și cele ale orbitei osculatoare (e.g. Brouwer și Clemence, 1961). În acest caz, abaterile de la orbita osculatoare se numesc

perturbații, acestea fiind nule la epoca osculației. Avantajul metodei lui Cowell este acela că pentru momente apropiate de epoca osculației, perturbațiile sunt mici și pot fi exprimate prin câteva cifre semnificative. Dezavantajul este că pentru perioade mari de timp perturbațiile se acumulează, ceea ce necesită corectarea orbitei și determinarea coordonatelor și vitezelor la noua epocă.

Fie (x_o, y_o, z_o) coordonatele heliocentrice rectangulare ale asteroidului de masă m în problema celor două corpuri, și (ξ, η, ζ) diferențele datorate perturbațiilor planetare. Coordonatele reale (x, y, z) ale lui m sunt date de relațiile $x = x_o + \xi$ și celelalte corespunzătoare lui y și z . Folosind aceleași notații din par.1.2.1. pentru distanțe, ecuațiile fundamentale ale metodei lui Encke sunt:

$$w^2 \ddot{\xi} = w^2 k^2 (1+m) \frac{1}{r_o^3} (f q x - \xi) + \sum_j w^2 k^2 m_j \left(\frac{x_j - x}{\rho_j^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right) \quad (43)$$

și cele corespunzătoare celorlaltor coordonate, unde w reprezintă pasul de integrare și :

$$\begin{cases} q = \frac{\left(x_o + \frac{1}{2} \xi\right) \xi + \left(y_o + \frac{1}{2} \eta\right) \eta + \left(z_o + \frac{1}{2} \zeta\right) \zeta}{r_o^2} \\ f = \frac{1 - (1 + 2q)^{-3/2}}{q} \end{cases}$$

Soluția ecuațiilor (43) introduce șase constante de integrare, alese astfel încât coordonatele și componentele vitezelor din orbita neperturbată să coincidă cu cele ale orbitei perturbate la o epocă dată, ceea ce înseamnă că $\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ sunt toate nule. Deoarece masele m_j și valorile (ξ, η, ζ) sunt mici, cantitățile (x, y, z) din membrul doi al ecuațiilor (43) pot fi înlocuite prin (x_o, y_o, z_o) , cu erori de ordinul m_j^2 .

Integrarea ecuațiilor (43) din metoda lui Encke se face asemănător cu metoda expusă în 1.2.1, cu deosebirea că valorile $f, f', \dots, {}^{II}f, {}^I f$ care apar în calculul cu diferențe finite se referă acum la coordonatele ξ, η și ζ .

1.2.3. Metode Runge-Kutta

După cum este cunoscut, metodele Runge-Kutta constituie o clasă largă de metode numerice destinate rezolvării problemei generale de tip Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_o) = y_o \end{cases}, \quad (44)$$

unde funcția f este diferențiabilă, iar relația a doua constituie o condiție la limită, cunoscută.

Metodele Runge-Kutta au trei proprietăți definitorii (e.g. Beu, 1992) :

- sunt metode directe (pas cu pas);
- soluția furnizată de metoda Runge-Kutta de ordinul p coincide cu dezvoltarea în serie Taylor până la termeni de ordinul h^p ;
- necesită numai evaluarea funcției $f(x,y)$, nu și a derivatelor sale.

Presupunând că se cere determinarea soluției pe rețeaua de puncte echidistante de normă h , $x_0, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots$, propagarea soluției de la punctul x_m la x_{m+1} se scrie dezvoltând funcția $y(x)$ în jurul punctului x_m :

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + f \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]_{(x_m, y_m)} \quad (45)$$

Metoda Runge-Kutta de ordinul p își propune construirea unei funcții de variabilă h , care să depindă de $f(x,y)$, dar nu și de derivatele sale, și pentru care dezvoltarea în serie după puterile lui h să coincidă cu dezvoltarea (45) a soluției exacte până la termeni de ordin p (cât mai mare), indiferent de funcția $f(x,y)$.

Predicția valorilor y_{m+1} se face sub forma combinației liniare:

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + \sum_{i=1}^p w_i k_i, \\ k_i = hf(\xi_i, \eta_i) \\ \xi_i = x_m + \alpha_i h \\ \eta_i = y_m + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \end{cases}, \quad (46)$$

unde α_i , β_{ij} și w_i sunt constante care trebuie determinate, iar $\alpha_1 = \beta_{11} = 0$, $\xi_1 = x_m$, $\eta_1 = y_m$.

Pentru $p=1$, formula Runge-Kutta de ordinul unu este:

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m), \quad (47)$$

cunoscută și sub denumirea de metoda lui Euler (sau a liniilor poligonale).

Pentru $p=2$, dezvoltând expresia lui y_{m+1} obținută din (46) după puterile lui h , după identificarea coeficienților lui h cu formula (45) și alegerea convenabilă a constantelor, se obține formula Runge-Kutta de ordinul doi:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} [f(x_m, y_m) + f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m))], \quad (48)$$

cunoscută și sub denumirea de algoritmul predictor-corector al lui Euler.

Varianta cea mai importantă este formula Runge-Kutta de ordinul 4:

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ cu} \\ k_1 = hf(x_m, y_m), \quad k_2 = hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x_m + h, y_m + k_3) \end{cases} \quad (49)$$

1.2.4. Alte metode de integrare

Într-un studiu relativ recent (Kinoshita și Nakai, 1988), bazat pe un chestionar distribuit membrilor Comisiei 7 (Mecanică Cerească) a Uniunii Astronomice Internaționale, între care figurează și țara noastră, sunt prezentate principalele metode de integrare numerică folosite în astronomia dinamică actuală și domeniile de lucru unde acestea sunt aplicate. Studiul clasifică metodele folosite de autori în două categorii: metode multipas și metode unipas (de tip Runge-Kutta, de tip serie Taylor și de tip extrapolare).

Dacă considerăm problema Cauchy:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(t_0) = \xi, \quad (50)$$

unde x și f sunt vectori, introducând notațiile:

$$\begin{cases} t_n = t_0 + nh \\ f_n = f(x_n, t_n) \end{cases}$$

cu x_n o soluție aproximativă pentru $x(t_n)$, atunci, o metodă generală multipas poate fi:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j x_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad (51)$$

unde α_j și β_j sunt constante care definesc integratorul cu pasul k , iar $\alpha_k = 1$. Formula (50) se numește integrator explicit (sau predictor) dacă $\beta_k = 0$ sau integrator implicit (sau corector) dacă $\beta_k \neq 0$.

Studiul conține referiri la metodele de integrare folosite de autori diferiți, la metodele de verificare a rezultatelor și la domeniile de aplicabilitate a metodelor de integrare. Dată fiind utilizarea pe scară tot mai largă a metodelor numerice, rezumăm în cele ce urmează rezultatele studiului autorilor japonezi (Kinoshita și Nakay, 1988):

Răspunsul la întrebarea „ce fel de metode de integrare numerică folosiți” situează metodele de tip Runge-Kutta pe primul loc (în 40% din cazuri), urmate de metodele de tip

multipas (33%), de tip extrapolare (15%) și de cele de tip Taylor (12%). Referitor la metodele de verificare a rezultatelor obținute prin integrare numerică, conservarea integralelor și integrarea inversă sunt cel mai des folosite (în 33% și respectiv 32% din cazuri), urmate de schimbarea pasului, folosirea a două metode diferite, compararea cu observațiile, ș.a. (în sub 10% din cazuri fiecare). Cele mai multe aplicații ale metodelor numerice se referă la dinamica asteroizilor (19%), a sateliților artificiali și în probleme de câteva corpuri (câte 14% din cazuri), la mișcarea cometelor și planetelor (câte 12%), ș.a.

1.3. PROBLEMA INVERSĂ - METODE DE DETERMINARE A ORBITELOR

1.3.1. Introducere

Spre deosebire de problema directă, care studiază evoluția dinamică a corpurilor Sistemului Solar când se cunoaște orbita (eliptică, parabolică sau hiperbolică), problema inversă constă în determinarea parametrilor orbitali, în ipoteza cunoașterii din observații a coordonatelor aparente ale corpului.

Problema inversă este mai dificilă chiar din start, deoarece pentru determinarea elementelor geometrice care definesc orbita (eliptică, de exemplu) sunt necesare coordonatele geometrice ale corpului, posibil de calculat prin aplicarea corecțiilor de paralaxă și aberație pozițiilor aparente observate. Aceste corecții nu pot fi cunoscute, datorită necunoașterii distanței geocentrice a astrului. De aceea, această problemă se rezolvă prin aproximații succesive, determinând mai întâi elementele orbitale (și distanța geocentrică) din pozițiile aparente, și repetând calculul cu distanța geocentrică astfel determinată, până când orbita devine suficient de exactă.

Determinarea celor șase constante orbitale se poate face considerând cel puțin șase date independente de observație, care vor defini astfel orbita „preliminară”. Acestea pot fi trei perechi de coordonate (α_i, δ_i) la momentele de observație t_i ($i=1,2,3$), sau câte o pereche $(\alpha, \delta), (\dot{\alpha}, \dot{\delta}), (\ddot{\alpha}, \ddot{\delta})$ la un moment de observație. Cele două metode au fost elaborate de Gauss, în 1801, și respectiv de Laplace, în 1780. Pornind de la o lucrare de popularizare (Alexescu, 1986), și folosind o referință mai veche în calculul orbitelor (Picart, 1913), am aplicat în perioada studenției metodele Gauss și Laplace la determinarea orbitelor cometare (Văduvescu, 1991), implementând metoda lui Gauss și calculul de efemeridă într-un program dezvoltat în limbajul FORTRAN pe calculatorul FELIX C-256 al Universității din Craiova.

1.3.2. Metoda lui Gauss

1.3.2.1. Probleme preliminare

Fie P_i trei poziții succesive la momentele de observație t_i ($i=1,2,3$) ale unei planete sau comete, în mișcarea în jurul Soarelui \odot , iar (X_i, Y_i, Z_i) coordonatele rectangulare heliocentrice ale acesteia. Dacă S_1, S_2, S_3 sunt ariile triunghiurilor $\odot P_1 P_2, \odot P_2 P_3, \odot P_1 P_3$, atunci ecuațiile fundamentale ale metodei lui Gauss sunt următoarele (e.g. Danjon, 1959):

$$x_1 \frac{S_2}{S_3} - x_2 + x_3 \frac{S_1}{S_3} = 0 \quad (52)$$

și cele corespunzătoare în y și z . Dacă notăm:

$$\theta_1 = t_2 - t_1, \theta_2 = t_3 - t_2, \theta_3 = t_3 - t_1,$$

folosind integrala ariilor $C = xy - yx$ și dezvoltarea în serie Taylor a elementelor x și y , ariile S_i pot fi scrise sub forma :

$$2S_1 = C\theta_1 \left[1 - \frac{k}{6} \frac{1}{r_2^3} \theta_1^2 - \frac{k}{4} \frac{1}{r_2^4} \theta_1^3 \dot{r}_2 + \dots \right] \quad (53)$$

și analog $2S_2$ și $2S_3$. Mai departe, se obțin expresiile rapoartelor S_2/S_3 și S_1/S_3 :

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{\theta_1}{\theta_3} \left[1 + \frac{k}{6} \frac{1}{r_2^3} (\theta_3^2 - \theta_1^2) - \frac{k}{4} \frac{1}{r_2^4} \dot{r}_2 \theta_2 (\theta_2 \theta_3 - \theta_1^2) + \dots \right] \quad (54)$$

cu k pătratul constantei lui Gauss. Din dezvoltarea coordonatelor x, y în funcție de x_2 și respectiv y_2 până la termenul de ordinul patru, se obține relația :

$$\theta_2 x_1 \left(1 + \frac{\psi_1}{r_1^3} \right) - \theta_3 x_2 \left(1 - \frac{\psi_2}{r_2^3} \right) + \theta_1 x_3 \left(1 + \frac{\psi_3}{r_3^3} \right) = 0, \quad (55)$$

unde s-au notat:

$$\psi_1 = \frac{k}{12} (\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2), \psi_2 = \frac{k}{12} (\theta_1 \theta_2 + \theta_3^2), \psi_3 = \frac{k}{12} (\theta_2 \theta_3 - \theta_1^2) \quad (56)$$

Identificarea sistemelor (52) și (55) furnizează formulele lui Gibbs:

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{\theta_2}{\theta_3} \cdot \frac{1 + \frac{\psi_1}{r_1^3}}{1 - \frac{\psi_2}{r_2^3}}, \quad \frac{S_1}{S_3} = \frac{\theta_1}{\theta_3} \cdot \frac{1 + \frac{\psi_3}{r_3^3}}{1 - \frac{\psi_2}{r_2^3}} \quad (57)$$

Dacă notăm prin Σ_i aria sectorului curbiliniu corespunzător lui S_i ($i=1,2,3$), atunci raportul $\gamma_i = \Sigma_i/S_i$ este furnizat de ecuația lui Gauss de gradul trei :

$$\gamma_i^3 - \gamma_i^2 - h_i \gamma_i - \frac{h_i}{9} = 0, \quad (58)$$

unde s-au notat:

$$\begin{cases} h_i = \frac{k\theta_i^2}{\kappa_i^2 \left[r_1 + r_i + \frac{2\sqrt{2}}{3} \kappa_i (1+3\xi) \right]} \\ \kappa_i^2 = r_1 r_i + x_1 x_i + y_1 y_i + z_1 z_i, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (59)$$

Formulele următoare stabilesc relații între anomaliile adevărate v_i și elementele geometrice ale elipsei:

$$\begin{cases} \sin(v_3 - v_1) = \frac{2S_3}{r_1 r_3}, \quad \cos(v_3 - v_1) = \frac{x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3}{r_1 r_3} \\ e \cos v_i = \frac{p}{r_i} - 1 = d_i, \quad i = 1, 3 \\ \tan \frac{v_1 + v_3}{2} = \frac{d_1 - d_3}{d_1 + d_3} \cot \frac{v_3 - v_1}{2} = \frac{d_1 - d_3}{d_1 + d_3} \frac{\kappa_3^2}{2S_3} \end{cases} \quad (60)$$

Dacă Δ este distanța geocentrică a planetei, iar (α, δ) coordonatele ecuatoriale geocentrice, atunci coordonatele ecuatoriale heliocentrice rectangulare (x, y, z) ale planetei se exprimă în funcție de coordonatele geocentrice (X, Y, Z) ale Soarelui prin relațiile:

$$\begin{cases} x = \Delta \cos \delta \cos \alpha - X = \lambda \Delta - X \\ y = \Delta \cos \delta \sin \alpha - Y = \mu \Delta - Y \\ z = \Delta \sin \delta - Z = \nu \Delta - Z \end{cases} \quad (61)$$

unde λ, μ, ν sunt parametrii directori ai poziției observate. Dezvoltând relațiile (52) cu ajutorul sistemului (61), obținem:

$$\lambda_1 \Delta_1 \frac{S_2}{S_3} - \lambda_2 \Delta_2 + \lambda_3 \Delta_3 \frac{S_1}{S_3} = \frac{S_2}{S_3} X_1 - X_2 + \frac{S_1}{S_3} X_3 = L \quad (62)$$

și celelalte în μ și ν ($=M$ și respectiv N). Soluția acestui sistem este de forma:

$$\begin{cases} \frac{S_2}{S_3} \Delta_1 = a_1 L + b_1 M + c_1 N \\ \Delta_2 = a_2 L + b_2 M + c_2 N \\ \frac{S_1}{S_3} \Delta_3 = a_3 L + b_3 M + c_3 N \end{cases} \quad (63)$$

cu notațiile:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\mu_2 \nu_3 - \mu_3 \nu_2}{D}, \quad a_2 = \frac{\mu_1 \nu_3 - \mu_3 \nu_1}{D}, \quad a_3 = \frac{\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1}{D} \\ D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} \end{cases} \quad (64)$$

și (b_1, b_2, b_3) și (c_1, c_2, c_3) obținute prin permutări circulare din (64).

În sfârșit, coordonatele ecliptice heliocentrice (x',y',z') ale astrului se exprimă în funcție de ariile proiecțiilor $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ale lui S_3 pe planele sistemului ecliptic, prin relațiile:

$$\begin{cases} 2\sigma_1 = x_1' y_3' - x_3' y_1' = 2S_3 \cos i \\ 2\sigma_2 = y_1' z_3' - y_3' z_1' = 2S_3 \sin i \sin \Omega \\ 2\sigma_3 = x_1' z_3' - x_3' z_1' = 2S_3 \sin i \cos \Omega \end{cases} \quad (65)$$

1.3.2.2. Algoritm de calcul

1. Se extrag coordonatele rectangulare ecuatoriale ale Soarelui $(X,Y,Z)_i$ la epocile t_i , $i=1,2,3$;
2. Cu parametrii λ, μ, ν din (61) și a_i, b_i, c_i din (64) se formează sistemele (62) în L, M, N și (63) în $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Pentru cele trei epoci t_i , se scriu relațiile:

$$r^2 = \Delta^2 - 2\Delta(\lambda X + \mu Y + \nu Z) + (X^2 + Y^2 + Z^2) \quad (66)$$

3. Cu θ_i se calculează S_1/S_3 , S_2/S_3 din (54), limitându-ne la primii doi termeni; se scriu expresiile L, M, N stabilite la etapa 2 în funcție de r_2^3 ;
4. Se introduc expresiile lui L, M, N găsite anterior în a doua relație (63) stabilită la etapa 2; se găsește o relație între Δ_2 și $1/r_2^3$ care se asociază cu (66) scrisă pentru t_2 . Din rezolvarea sistemului, rezultă r_2 și Δ_2 ;
5. Se calculează S_1/S_3 , S_2/S_3 și L, M, N din formulele găsite în etapa 3 și Δ_1, Δ_3 și r_1, r_2, r_3 din etapa 2;
6. Se calculează timpul de aberație $\tau_i = 0.00577\Delta_i$ (zile) și se extrage din cele trei momente t_i . Se calculează noi valori θ_i ;
7. Cu formulele lui Gibbs (57) se calculează noi valori (mai exacte) pentru S_1/S_3 , S_2/S_3 și apoi L, M, N , din etapa 2, Δ_i și r_i ;
8. Cu noile valori Δ_i găsite la etapa 7, se calculează noi valori τ_i și apoi θ_i ;
9. Din relațiile (61) se calculează coordonatele (x_i, y_i, z_i) ;
10. Din (59) se calculează κ_i^2 și h_i ($i=1,2,3$), neglijându-se parametrul ξ ;
11. Din relațiile $S_1/S_3 = (\theta_1/\theta_3) \cdot (\gamma_3/\gamma_1)$, $S_2/S_3 = (\theta_2/\theta_3) \cdot (\gamma_3/\gamma_2)$ se calculează S_1/S_3 , S_2/S_3 și apoi L, M, N și Δ_i , r_i cu relațiile de la etapa 2;
12. Din (61) se calculează (x_i, y_i, z_i) ;
13. Transformarea coordonatelor ecuatoriale (x, y, z) în ecliptice (x', y', z') se face după relațiile:

$$\begin{cases} x_i' = x_i \\ y_i' = y_i \cos \varepsilon + z_i \sin \varepsilon \\ z_i' = -y_i \sin \varepsilon + z_i \cos \varepsilon \end{cases}, \quad (67)$$

unde ε este înclinarea ecuatorului pe ecliptică la epoca observației;

14. Se calculează S_3 din (65) și parametrul orbitei:

$$p = \frac{C^2}{k} = 4S_3^2 \frac{\gamma_3^2}{k\theta_3^2} \quad (68)$$

15. Cu (65) se calculează elementele i și Ω ;

16. Din (60) se calculează $v_3 - v_1, d_1, d_3, \tan \frac{v_1 + v_3}{2}$ și apoi v_1 și v_3 ;

17. Din (60) se calculează e și apoi $a = p/(1 - e^2)$, $n = \sqrt{ka^{-3/2}}$;

18. Din relațiile:

$$\begin{cases} \sin(v + \omega) = \frac{z'}{r \sin i} = \frac{-x \sin \Omega + y \cos \Omega}{r \cos i} \\ \cos(v + \omega) = \frac{x'}{r} \cos \Omega + \frac{y'}{r} \sin \Omega \end{cases} \quad (69)$$

se calculează $v + \omega$ și apoi ω ,

19. Din relația:

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{v}{2} \quad (70)$$

și ecuația lui Kepler se calculează E (anomalia excentrică) și apoi M .

1.3.3. Metoda lui Laplace

1.3.3.1. Probleme preliminare

Parametrii directori ai poziției geocentrice a astrului și derivatele lor în funcție de timp au următoarele expresii:

$$\begin{cases} \lambda = \cos \delta \cos \alpha, \quad \dot{\lambda} = -\dot{\alpha} \cos \delta \sin \alpha - \dot{\delta} \sin \delta \cos \alpha \\ \mu = \cos \delta \sin \alpha, \quad \dot{\mu} = \dot{\alpha} \cos \delta \cos \alpha - \dot{\delta} \sin \delta \sin \alpha \\ \nu = \sin \delta, \quad \dot{\nu} = \dot{\delta} \cos \delta \end{cases} \quad (71)$$

$$\begin{cases} \ddot{\lambda} = -\ddot{\alpha} \cos \delta \sin \alpha - \ddot{\delta} \sin \delta \cos \alpha + 2\dot{\alpha}\dot{\delta} \sin \delta \sin \alpha - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\delta}^2) \cos \delta \cos \alpha \\ \ddot{\mu} = \ddot{\alpha} \cos \delta \cos \alpha - \ddot{\delta} \sin \delta \sin \alpha - 2\dot{\alpha}\dot{\delta} \sin \delta \cos \alpha - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\delta}^2) \cos \delta \sin \alpha \\ \ddot{\nu} = \ddot{\delta} \cos \delta - \dot{\delta}^2 \sin \delta \end{cases}$$

Cu notațiile anterioare, relațiile următoare exprimă legătura între coordonatele ecuatoriale:

$$\begin{cases} x = \lambda \Delta - X, \quad \dot{x} = \dot{\lambda} \Delta + \lambda \dot{\Delta} - \dot{X} \\ y = \mu \Delta - Y, \quad \dot{y} = \dot{\mu} \Delta + \mu \dot{\Delta} - \dot{Y} \\ z = \nu \Delta - Z, \quad \dot{z} = \dot{\nu} \Delta + \nu \dot{\Delta} - \dot{Z} \end{cases} \quad (72)$$

Derivând din nou aceste relații și folosind ecuațiile de mișcare din problemele celor două corpuri Soare-Pământ și Soare-astru, rezultă următorul sistem în $\Delta, \dot{\Delta}, \ddot{\Delta}$ (e.g. Danjon, 1959):

$$\ddot{\Delta} + 2\dot{\lambda}\dot{\Delta} + \lambda\left(\ddot{\Delta} + \frac{k\Delta}{r^3}\right) = kX\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) \quad (73)$$

și celelalte două relații în μ și ν cu Y și respectiv Z . Soluția $(\Delta, \dot{\Delta})$ a acestui sistem este:

$$\begin{cases} \Delta = k\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)\frac{D_2}{D_1} \\ \dot{\Delta} = \frac{\Delta}{2}\frac{D_3}{D_2} \end{cases} \quad (74)$$

cu notațiile:

$$\begin{cases} D_1 = \ddot{\lambda}(\nu\dot{\mu} - \mu\dot{\nu}) + \ddot{\mu}(\lambda\dot{\nu} - \nu\dot{\lambda}) + \ddot{\nu}(\mu\dot{\lambda} - \lambda\dot{\mu}) \\ D_2 = X(\nu\dot{\mu} - \mu\dot{\nu}) + Y(\lambda\dot{\nu} - \nu\dot{\lambda}) + Z(\mu\dot{\lambda} - \lambda\dot{\mu}) \\ D_3 = X(\mu\ddot{\nu} - \nu\ddot{\mu}) + Y(\nu\ddot{\lambda} - \lambda\ddot{\mu}) + Z(\lambda\ddot{\mu} - \mu\ddot{\lambda}) \end{cases} \quad (75)$$

Prima ecuație (74) și relația între laturile triunghiului Soare-Pământ-astru furnizează următorul sistem în necunoscutele (r, Δ) :

$$\begin{cases} r^3 = \frac{-\frac{D_2}{D_1}k}{-\frac{D_2}{D_1}k\frac{1}{R^3} - \Delta} \\ r^2 = \Delta^2 - 2\Delta(\lambda X + \mu Y + \nu Z) + R^2 \end{cases} \quad (76)$$

Elementele orbitale i și Ω se calculează din relațiile:

$$\tan \Omega = \frac{c_2}{c_3}, \quad \tan i = \frac{\sqrt{c_2^2 + c_3^2}}{c_1}, \quad (77)$$

unde:

$$\begin{cases} c_1 = \gamma_1 \cos \varepsilon + \gamma_3 \sin \varepsilon \\ c_2 = \gamma_2 \\ c_3 = -\gamma_1 \sin \varepsilon + \gamma_3 \cos \varepsilon \\ \gamma_1 = x\dot{y} - y\dot{x}, \quad \gamma_2 = y\dot{z} - z\dot{y}, \quad \gamma_3 = x\dot{z} - z\dot{x} \end{cases} \quad (78)$$

Pentru corectarea orbitei preliminare folosind trei observații, următoarele relații sunt folosite la calculul efemeridei:

$$\begin{cases} x = A_x(\cos E - e) + B_x \sin E \\ \dot{x} = \frac{n}{1 - e \cos E}(-A_x \sin E + B_x \cos E) \end{cases} \quad (79)$$

și cele în y și z corespunzătoare lui A_y, B_y și respectiv A_z, B_z , unde:

$$\begin{cases} A_x = x \frac{a}{r} \cos E - \frac{\dot{x} \sin E}{n} \\ B_x = x \frac{a}{r} \sin E + \frac{\dot{x}(\cos E - e)}{n} \end{cases} \quad (80)$$

și celelalte, prin permutări în y și z .

Acestea sunt relațiile fundamentale ale metodei lui Laplace. Totuși, în ciuda simplității sale, la epoca la care a fost propusă, metoda nu indica un procedeu de determinare a derivatelor $(\dot{\alpha}, \dot{\delta}), (\ddot{\alpha}, \ddot{\delta})$. Următorul pasaj extras dintr-o scrisoare adresată de Lagrange lui Laplace, în 1781, este elocvent în acest sens (Picart, 1913): „Consider că metoda dumneavoastră furnizează, analitic vorbind, soluția cea mai simplă a problemei în cauză; dar mă tem că ea nu este atât de utilă în practică precum este în teorie, din cauza dificultății de a determina, a posteriori, derivatele prime și secunde ale coordonatelor geocentrice”. Astăzi, pentru determinarea acestor derivate, există două metode, pe care le vom enunța în cele ce urmează.

Prima metodă a fost propusă de Danjon (1959), și folosește pozițiile observate $(\alpha_O, \delta_O)_i$ la epocile t_i ($i=1,2,3$), derivând numeric aceste coordonate și ameliorând orbita calculată la epoca medie $t_O=(t_1+t_2+t_3)/3$ prin metoda pozițiilor fictive. Această metodă constă în determinarea, în primă aproximație, a pozițiilor $(\alpha_C, \delta_C)_i$ la epocile t_i , folosind orbita calculată. Aceste poziții vor diferi de cele observate prin reziduurile $(\Delta\alpha, \Delta\delta)_i$ date de diferențele „O-C”. Prin adunarea la pozițiile observate a reziduurilor, rezultă pozițiile fictive (α_f, δ_f) care, folosite în a doua aproximație ca date de intrare în locul lui $(\alpha_O, \delta_O)_i$, vor determina o nouă orbită. Calculând din nou efemerida pentru momentele t_i , vom determina noi reziduuri, inferioare celor de la pasul anterior. Repetând procedeul, reziduurile se vor anula, iar orbita se va îmbunătăți folosind cele trei observații; contribuția românească la metoda pozițiilor fictive aparține dr. V. Ionescu Vlăsceanu (1987).

A doua metodă de calcul al derivatelor $(\dot{\alpha}, \dot{\delta}), (\ddot{\alpha}, \ddot{\delta})$ este o contribuție personală, și folosește câteva zeci de observații CCD, determinate din fenomenele de apropiere aparentă a corpurilor mici de stele de catalog. În cazul observațiilor CCD, dat fiind avantajul expunerii de ordinul secundelor, în timpul acestor fenomene cu dinamică rapidă, pot fi obținute totuși câteva zeci de imagini care vor furniza valorile $(\alpha, \delta), (\dot{\alpha}, \dot{\delta}), (\ddot{\alpha}, \ddot{\delta})$.

Avantajul acestei din urmă metode este dublu, și îl vom sublinia în cele ce urmează. Pe de o parte, la observarea fenomenului de apropiere, în reperul stelei, precizia de determinare a pozițiilor corpului crește odată cu scăderea separației stea-obiect, date fiind erorile de reducere a observației (par. 5.1.1, 5.2.1) și cele introduse de aberațiile optice ale instrumentului. Din

această cauză, în această metodă, recomandăm alegerea epocii t_0 - momentul separației minime stea-obiect (par. 6.2.4). Pe de altă parte, deși valorile (α_0, δ_0) sunt afectate de eroarea de catalog a stelei de reper (în general sub $0''.1$ - par. 5.2.3), totuși, din considerente de poziții relative, valorile derivatelor nu vor fi afectate de această eroare.

Determinarea valorilor $(\dot{\alpha}, \dot{\delta}), (\ddot{\alpha}, \ddot{\delta})$ se face cu aproximarea celor câteva zeci de poziții prin polinoame de gradul doi:

$$\begin{cases} \alpha = a_\alpha t^2 + b_\alpha t + c_\alpha \\ \delta = a_\delta t^2 + b_\delta t + c_\delta \end{cases} \quad (81)$$

unde coeficienții a_α, \dots se vor determina prin metoda celor mai mici pătrate, și din care derivatele coordonatelor rezultă imediat:

$$\dot{\alpha}_o = 2a_\alpha t_o + b_\alpha, \quad \ddot{\alpha}_o = 2a_\alpha, \quad \dot{\delta}_o = 2a_\delta t_o + b_\delta, \quad \ddot{\delta}_o = 2a_\delta \quad (82)$$

1.3.3.2. Algoritm de calcul

1. Se alege epoca medie t_o ($t_o = (t_1 + t_2 + t_3)/3$ în cazul metodei cu trei observații), se extrag coordonatele Soarelui $(X, Y, Z), (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ la epoca medie (și la momentele t_i în cazul metodei pozițiilor fictive); se calculează $(\dot{\alpha}, \dot{\delta}), (\ddot{\alpha}, \ddot{\delta})$ cu una dintre cele două metode din par. 1.3.3.1;
2. Cu (71) se calculează parametrii directori (λ, μ, ν) și derivatele $(\dot{\lambda}, \dot{\mu}, \dot{\nu}), (\ddot{\lambda}, \ddot{\mu}, \ddot{\nu})$;
3. Cu (75) se calculează D_1, D_2, D_3 ; din (76) se determină r și Δ prin aproximații succesive (inițializând $\Delta=1$), și apoi $\dot{\Delta}$ din (74);
4. Se calculează coordonatele heliocentrice și derivatele lor din (72), cu care se determină o valoare mai exactă $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ și $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$;
5. Din relația $-\frac{1}{a} + \frac{2}{r} = \frac{V^2}{k}$ rezultă a , și apoi $n = \sqrt{ka^{-3/2}}$. Constanta ariilor rezultă din relația:

$$C^2 = (xy - yx)^2 + (yz - zy)^2 + (xz - zx)^2 \quad (83)$$

iar $p = C^2/k$ și $e = \sqrt{1 - p/a}$. Se calculează unghiul auxiliar β din relația:

$$\sin \beta = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{rV} \quad (84)$$

și apoi E_0 din

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \tan \beta, \quad (85)$$

după care M_0 din ecuația lui Kepler. În cazul metodei pozițiilor fictive, cu (80) se calculează $(A_x, B_x, \dots)_i$ pentru cele trei epoci și apoi $(x, y, z)_i$ cu (79);

6. În cazul metodei pozițiilor fictive, din $M = M_o + n(t - t_o)$ se calculează M_i și apoi u_i din ecuația lui Kepler; se calculează coordonatele geocentrice $\xi = x + X, \eta = y + Y, \zeta = z + Z$ pentru cele trei momente. Din transformările:

$$\tan \alpha_c = \frac{\eta}{\xi}, \quad \sin \delta_c = \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \quad (86)$$

se calculează efemerida $(\alpha_c, \delta_c)_i$. Se determină reziduurile $\Delta\alpha = \alpha_o - \alpha_c, \Delta\delta = \delta_o - \delta_c$;

7. În cazul metodei pozițiilor fictive, se calculează pozițiile $\alpha_f = \alpha_o + \Delta\alpha, \delta_f = \delta_o + \Delta\delta$.

Se reia calculul 1-7 până când reziduurile devin suficient de mici;

8. Cu distanța geocentrică calculată, se determină timpul de aberație $\tau = 0.00577\Delta$ și se corectează momentele observațiilor, $t_i = t_i - \tau$. Se transformă pozițiile aparente observate topocentrice în poziții baricentrice (pentru care au fost scrise ecuațiile de mișcare în problema celor două corpuri Soare-baricentru Pământ-Lună) și se aplică și corecțiile de aberație, determinându-se pozițiile adevărate.

Se reia calculul 1-8 (practic e suficientă o singură iterație).

9. Cu (78) se calculează c_1, c_2, c_3 , apoi i și Ω din (77). Transformările (67) furnizează coordonatele ecliptice heliocentrice (x', y', z') , din care rezultă $v + \omega$ din relațiile:

$$\begin{cases} r \sin(v + \omega) = \frac{z'}{\sin i} \\ r \cos(v + \omega) = x' \cos \Omega + y' \sin \Omega \end{cases} \quad (87)$$

și apoi v din relațiile:

$$\begin{cases} \cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos E} \\ \sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos E} \end{cases} \quad (88)$$

și în sfârșit, ω .

